

SPATII EUCLIDIENE

1. Să se calculeze produsul scalar al vectorilor:

a) $\vec{v}_1 = (1, 3, -3, 4)$, $\vec{v}_2 = (4, -5, 3, 1)$ în \mathbb{R}^4 ;

b) $\vec{w}_1 = (3, 2, -4, 0, 1)$, $\vec{w}_2 = (-1, 1, -1, 4, -3)$ în \mathbb{R}^5 ;

c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ în $M_2(\mathbb{R})$,

considerând că spațiile \mathbb{R}^4 și \mathbb{R}^5 sunt înfățișate cu produsul scalar standard (canonic), iar produsul scalar în spațiul vectorial $M_2(\mathbb{R})$ al matricelor pătrate de ordinul doi este dat de

$$A \cdot B = \text{tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 a_{ki} b_{ki}, \text{ oricare}$$

să fie matricele $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ cu

elementele numere reale, prin "tr" înțelegând urma matricei dintr-o paranteză, adică suma elementelor de pe diagonala principală a matricei produs $A^T B$.

Răspuns. a) $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -16$; b) $\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = 0$; c) $AB = 7$.

2. În spațiul euclidian \mathbb{R}^2 prevăzut cu produsul scalar standard (canonic sau uzual) se consideră vectorii $\vec{v}_1 = (1, 2\alpha)$ și $\vec{v}_2 = (\beta, -2)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Când cei doi vectori formează o bază ortogonală? Pentru $\alpha = \beta = 1$ să se arate că cei doi vectori au lungimile egale (normele egale).

Răspuns. Se impune condiția $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0 \Rightarrow \beta = 4\alpha$.
Pentru $\alpha = \beta = 1 \Rightarrow \|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = \sqrt{5}$.

3. Fie vectorii din \mathbb{R}^3 :

a) $\vec{v}_1 = (1, -1, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$, $\vec{v}_3 = (\alpha, \beta, -1)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

b) $\vec{w}_1 = (1, 0, -1)$, $\vec{w}_2 = (1, \lambda, 1)$, $\vec{w}_3 = (1, 2, \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Pentru ce valori ale parametrilor reali α, β , respectiv λ, μ vectorii sistemului $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, respectiv $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ sunt ortogonali doi câte doi?

Răspuns. a) $\alpha = 2$, $\beta = 1$; b) $\lambda = -1$, $\mu = 1$.

4. Să se arate că aplicația " \cdot ": $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$(*) \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2, \text{ unde}$$

$\vec{x} = (x_1, x_2)_B$, $\vec{y} = (y_1, y_2)_B$ iar $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ este o bază oarecare (nu neapărat cea canonică) din \mathbb{R}^2 , este un produs scalar pe (în) \mathbb{R}^2 .

În spațiul euclidian (\mathbb{R}^2, \cdot) , unde produsul scalar este cel de mai sus, să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{x} = (1, 1)_B$, $\vec{y} = (-3, 2)_B$, normele (lungimile) acestora, precum și unghiul dintre ei.

Răspuns. Se arată că aplicația (*) satisface axiomele din definiția produsului scalar, pe un spațiu vectorial real (vezi notite curs). Apoi,

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 4; \quad \|\vec{x}\| = \sqrt{5}; \quad \|\vec{y}\| = \sqrt{5}; \quad \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{5} \sqrt{5}} = \frac{4}{5}.$$

5. Să se arate că vectorii $\vec{f}_1 = (1, 1, -1)$, $\vec{f}_2 = (-1, 1, 1)$ și $\vec{f}_3 = (1, 0, 1)$ sunt linear independenți și apoi ortonormați baza formată în acestia în \mathbb{R}^3 .

Rezolvare. Pentru independența liniară a sistemului de vectori $B' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ scriem matricea C de trecere de la baza canonică $B = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$ din \mathbb{R}^3 la sistemul B' . Avem "schema"

$$B \xrightarrow{C} B'$$

și se știe că matricea C are pe coloane coordonatele vectorilor $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ în baza B . Deci

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se știe de asemenea că B' este bază în $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \det C \neq 0$.

Avem $\det C = 4 \neq 0 \Rightarrow B'$ este bază în \mathbb{R}^3 .

De la sistemul de vectori B' trecem la sistemul de vectori $B'' = \{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ ai căror vectori dorim să fie ortogonali doi câte doi. Nu ne împiedică nimic să luăm

$$\begin{cases} \vec{g}_1 = \vec{f}_1 \\ \vec{g}_2 = \vec{f}_2 - \alpha_{21} \vec{g}_1 \\ \vec{g}_3 = \vec{f}_3 - \alpha_{31} \vec{g}_1 - \alpha_{32} \vec{g}_2 \end{cases}$$

Impunând condițiile: $\vec{g}_1 \perp \vec{g}_2$ și $\vec{g}_1 \perp \vec{g}_3, \vec{g}_2 \perp \vec{g}_3$

din prima condiție obținem $\alpha_{21} = \frac{\vec{f}_2 \cdot \vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|^2}$
 $= \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \vec{g}_2 = \vec{f}_2 + \frac{1}{3}\vec{f}_1 = (-1, 1, 1) +$
 $+ (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = (-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$. Așadar

$$\vec{g}_2 = (-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}(1, 2, 1)$$

Rezultă $\|\vec{g}_2\| = \frac{2}{3} \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \frac{2}{3} \sqrt{6}$.

Impunând condițiile de ortogonalitate $\vec{g}_1 \perp \vec{g}_2$ ($\vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2 = 0$) și $\vec{g}_1 \perp \vec{g}_3$ ($\vec{g}_1 \cdot \vec{g}_3 = 0$), obținem

$$\alpha_{31} = \frac{\vec{f}_3 \cdot \vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|^2} \quad \alpha_{32} = \frac{\vec{f}_3 \cdot \vec{f}_2}{\|\vec{g}_2\|^2} \Rightarrow$$

$$\alpha_{31} = \frac{0}{\|\vec{f}_1\|^2} = 0, \quad \alpha_{32} = \frac{0}{\|\vec{g}_2\|^2} = 0,$$

prin urmare $\vec{g}_3 = \vec{f}_3$ și $\|\vec{f}_3\| = \|\vec{g}_3\| = \sqrt{2}$.

Vectorii $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ sunt ortogonali doi câte doi, însă nu au norme egale cu unitatea din \mathbb{R}^3 ; $\|\vec{g}_1\| = \|\vec{f}_1\| = \sqrt{3}$;

$$\|\vec{g}_2\| = \frac{2}{3} \sqrt{6} \text{ și } \|\vec{g}_3\| = \|\vec{f}_3\| = \sqrt{2}.$$

Trecem la sistemul de vectori ortonormat prin $\vec{u}_1 = \frac{\vec{g}_1}{\|\vec{g}_1\|}$, $\vec{u}_2 = \frac{\vec{g}_2}{\|\vec{g}_2\|}$ și $\vec{u}_3 = \frac{\vec{g}_3}{\|\vec{g}_3\|}$. Obținem

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1) = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_3 \\ \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1) = -\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e}_3 \\ \vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_3 \end{cases}$$

Pă se verifică că matricea de trecere de la baza canonică din \mathbb{R}^3 la sistemul de vectori $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ este ortogonală.

6. Determinați valorile lui $\lambda \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{f}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{f}_2 = (1, -1, 0)$, $\vec{f}_3 = (0, 0, \lambda)$ formează o bază în \mathbb{R}^3 .

Pentru $\lambda = 1$, orthonormată baza respectivă

Răspuns. $\lambda \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Baza orthonormată care se va găsi plecând de la baza (ca la $\lambda = 1$)

$$\vec{f}_1 = (1, 1, 0), \vec{f}_2 = (1, -1, 0), \vec{f}_3 = (0, 0, 1)$$

este

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_2$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_2$$

$$\vec{u}_3 = (0, 0, 1) = \vec{e}_3.$$

Observație Baza $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ (care este orthonormată) se obține din baza canonică $B = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$, de asemenea orthonormată, printr-o rotație de 45° în jurul lui \vec{e}_3 care, după cum se vede din răspuns, rămâne neschimbat în procesul de orthonormare.

7. Arătați că vectorii $\vec{f}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{f}_2 = (1, -2, 0)$ și $\vec{f}_3 = (0, 0, 1) = \vec{e}_3$ formează o bază în \mathbb{R}^3 .

Orthonormată baza respectivă.

Răspuns. $\vec{g}_1 = \vec{f}_1$; $\vec{g}_2 = \vec{f}_2 - \alpha_{21} \vec{g}_1 = (3, -3, 0)$, $\vec{g}_3 = \vec{f}_3$,

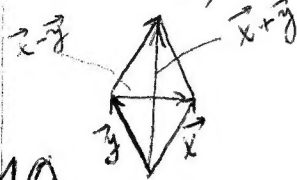
iar baza orthonormată este $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1, 0)$, $\vec{u}_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} (3, -3, 0)$, $\vec{u}_3 = \vec{e}_3$.

8. Să se determine condiția în care vectorii $\vec{f}_1 = (1, 1, \lambda)$, $\vec{f}_2 = (1, \lambda, 1)$, $\vec{f}_3 = (\mu, 1, 1)$ formează o bază în \mathbb{R}^3 . Pentru $\lambda = -1$ și $\mu = 0$ se orthonormaze baza respectivă.

Răspuns. $(\lambda-1)[\mu(\lambda+1)-2] \neq 0$. Baza orthonormată este: $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, -1)$, $\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (2, -1, 1)$, $\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, 1)$.

9. a) Să se arate că dacă norma unui vector provine dintr-un produs scalar și $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$ atunci $(\vec{x} - \vec{y}) \perp (\vec{x} + \vec{y})$. b) Explicați rezultatul.

Răspuns a) se arată că $(\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2 = 0$



b) Într-un "romb" diagonalele sunt perpendiculare. Vezi desenele din stânga.

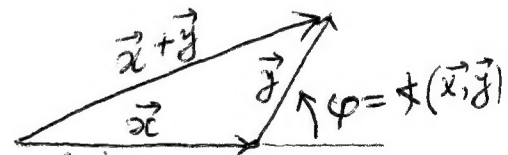
10.

Să se arate că dacă $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$, unde prin (\vec{x}, \vec{y}) am notat produsul scalar al vectorilor \vec{x} și \vec{y} dintr-un spațiu vectorial euclidian real, iar $\|\vec{x}\|$ este norma (lungimea) vectorului \vec{x} , atunci

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2} (\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2)$$

Dați o interpretare geometrică rezultatului.

Răspuns. Studiați desenele



și amintiți-vă de teorema cunoscută.

11. Să se demonstreze că într-un spațiu euclidian real \forall au loc egalitatea

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2)$$

Să se dea o interpretare geometrică rezultatului.

Răspuns Studiați desenele. Ce figură geometrică reprezintă ABCD?

